平面向量与复数章末小测

建议用时 25 分钟 · 满分 30 分

第 1 题 · 平行四边形的顶点（5 分）

平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点为 $A(-4,2)$、$B(2,8)$、$C(5,-1)$。求 $\overrightarrow{AB}$ 和顶点 D 的坐标。

解析与评分

$\overrightarrow{AB}=(2+4,8-2)=(6,6)$。由 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$，得 $D=(5-6,-1-6)=(-1,-7)$。

评分要点为正确求向量占 2 分，利用对边向量关系占 1 分，正确求 D 占 2 分。

第 2 题 · 两个模相等时的夹角（5 分）

设 $\mathbf{a}=(t,3)$、$\mathbf{b}=(2,-2)$。若 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$，求 t 与向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的夹角。

解析与评分

两边平方相减，得 $4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$，即 $2t-6=0$，故 $t=3$。因为两向量都非零，数量积为零，所以夹角为 90°。

评分要点为推出数量积为零占 2 分，解出 t 占 2 分，求出夹角占 1 分。

第 3 题 · 复数除法、模和旋转（8 分）

设 $z=\dfrac{(1+2i)^2}{2-i}$。写出 z 的代数形式，求 $|z|$。把 z 对应的点绕原点顺时针旋转 90°，求像点对应的复数。

解析与评分

$(1+2i)^2=-3+4i$。分子和分母同乘 $2+i$，得

$$z=\frac{(-3+4i)(2+i)}{5}=-2+i.$$

因此 $|z|=\sqrt{5}$。顺时针旋转 90° 对应乘 $-i$，故像点对应 $(-i)(-2+i)=1+2i$。

评分要点为展开平方占 2 分，完成除法占 2 分，求模占 2 分，求旋转后复数占 2 分。

第 4 题 · 模的轨迹与数量积极值（12 分）

复数 $z=x+yi$ 满足 $|z-(7-i)|=\dfrac{3}{2}|z-(2-i)|$，其中 $x,y\in\mathbb{R}$。

（1）求点 (x,y) 的轨迹方程，并写出圆心和半径。

（2）求该轨迹与虚轴的交点所对应的复数。

（3）求 $3x-4y$ 的最大值，并写出取到最大值时的点。

解析与评分

（1）两边均为非负，平方得到等价式 $4[(x-7)^2+(y+1)^2]=9[(x-2)^2+(y+1)^2]$。展开配方得 $(x+2)^2+(y+1)^2=36$。轨迹是圆心 $(-2,-1)$、半径为 6 的圆。

（2）令 $x=0$，得 $(y+1)^2=32$，所以对应复数为 $(-1+4\sqrt{2})i$、$(-1-4\sqrt{2})i$。

（3）令 $\mathbf{w}=(x+2,y+1)$，则 $|\mathbf{w}|=6$，且 $3x-4y=-2+(3,-4)\cdot\mathbf{w}\le -2+5\cdot 6=28$。取等时 $\mathbf{w}=6(3,-4)/5$，所以 $(x,y)=(8/5,-29/5)$。

评分要点为第（1）问写出平方等价式占 2 分，配方并确定圆心与半径占 3 分。第（2）问列交点方程占 1 分，求出两个复数占 2 分。第（3）问用投影或数量积求最大值占 2 分，写出取等条件与坐标占 2 分。