三角函数章末小测

建议用时 25 分钟 · 满分 30 分

第 1 题 · 象限与二倍角（5 分）

已知 α 是第四象限角，$\cos\alpha=5/13$。求 $\sin 2\alpha$ 与 $\cos 2\alpha$。

解析与评分

> 由于 α 在第四象限，$\sin\alpha=-\sqrt{1-(5/13)^2}=-12/13$。（1 分）
>
> 代入 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ 得 $\sin 2\alpha=-120/169$。（2 分）
>
> 代入 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 得 $\cos 2\alpha=-119/169$。（2 分）

第 2 题 · 正弦型图像的周期与峰值（5 分）

设 $f(x)=2\sin(4x-\pi/3)+3$。求最小正周期与 $[0,\pi/2]$ 上所有最高点的横坐标。

解析与评分

> 角频率为 4，所以最小正周期为 $2\pi/4=\pi/2$。（2 分）
>
> 当 $4x-\pi/3=\pi/2+2k\pi$ 时取得最高值。相应横坐标为 $5\pi/24+k\pi/2$，$k\in\mathbb{Z}$。在 $[0,\pi/2]$ 内只保留 $x=5\pi/24$。（3 分）

第 3 题 · 解三角形与面积（8 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$b=6, c=10, A=60^\circ$。求边 a、面积 S 与 $\cos B$。

解析与评分

> 由余弦定理，$a^2=6^2+10^2-2\cdot 6\cdot 10\cos 60^\circ=76$，得 $a=2\sqrt{19}$。（3 分）
>
> 面积为 $S=\tfrac12 bc\sin A=15\sqrt{3}$。（2 分）
>
> 再用余弦定理得 $\cos B=(a^2+c^2-b^2)/(2ac)=7/(2\sqrt{19})$。（3 分）

第 4 题 · 同频合成与转盘观测窗口（12 分）

一竖直转盘上的标志相对圆心的竖直位移为 $d(t)=\sqrt{3}\sin(\pi t/6)-\cos(\pi t/6)$ 米，时间 t 以秒计。观测窗口为 $0\le t\le 12$。

（1）求该运动模型的最小正周期、最大竖直位移，以及从观测开始首次达到这一最大值的时刻。

（2）摄像机在 $|d(t)|\le 1$ 时能拍到标志。求窗口内能拍到标志的所有时刻与累计时长。

解析与评分

> （1）合成得 $d(t)=2\sin(\pi t/6-\pi/6)$。（3 分）
>
> 最小正周期为 $2\pi/(\pi/6)=12$ 秒。（1 分）
>
> 最大竖直位移为 2 米。观测开始时相位为 $-\pi/6$，其后第一次达到正弦的峰值时相位为 $\pi/2$，解得 $t=4$ 秒。（2 分）
>
> （2）设 $u=\pi t/6-\pi/6$，则 $-\pi/6\le u\le 11\pi/6$，条件为 $|\sin u|\le 1/2$。筛得 $u\in[-\pi/6,\pi/6]\cup[5\pi/6,7\pi/6]\cup\{11\pi/6\}$。（3 分）
>
> 换回时间得 $t\in[0,2]\cup[6,8]\cup\{12\}$。单独的时刻 $t=12$ 也满足不等式，持续时间为零，故累计时长为 4 秒。（3 分）