立体几何章末小测

建议用时 25 分钟 · 满分 30 分

第 1 题 · 展示模型的表面积（5 分）

一座展示模型由边长为 12 厘米、高为 4 厘米的正方形底座与一个底面半径为 5 厘米、高为 6 厘米的直圆柱拼成。底座为直棱柱，圆柱的下底完全贴在底座上表面的中央。求模型全部外露表面的面积，底座下表面计入。

解析与评分

底座原表面积为 $2\cdot 12^2+4\cdot 12\cdot 4=480$ 平方厘米。（2 分）

上表面被圆柱遮住 25π 平方厘米。圆柱外露的上底面积是 25π，侧面积为 $2\pi\cdot 5\cdot 6=60\pi$ 平方厘米。（2 分）

因此全部外露面积为 $480+60\pi$ 平方厘米。（1 分）

第 2 题 · 检测杆与斜面所成角（5 分）

检测杆的两个端点为 $P(0,0,0)$ 与 $Q(3,4,6)$，斜面的方程为 $2x-y+2z=0$。求检测杆与斜面所成角的正弦。

解析与评分

检测杆方向向量为 $\mathbf{v}=(3,4,6)$，斜面法向量可取 $\mathbf{n}=(2,-1,2)$。（2 分）

数量积 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=6-4+12=14$，模长分别为 $\sqrt{61}$ 和 3。（2 分）

用方向向量与法向量的夹角换算线面角，得正弦值 $\dfrac{14}{3\sqrt{61}}$。（1 分）

第 3 题 · 挡雨板的开角与净距（8 分）

三角形挡雨板 PAB 的边 AB 落在水平地面上。地面上有一点 C，满足 $AC\perp AB$、$AC=9$ 分米。板上顶点 P 在 C 的正上方，$CP=12$ 分米。

（1）求二面角 $C-AB-P$ 的余弦。

（2）求点 C 到挡雨板所在平面的距离。

解析与评分

因为 CP 垂直于地面，AB 同时垂直于平面 ACP 内相交的两条直线 AC,CP，因此 $AB\perp$ 平面 ACP。在这个截面中，$\angle CAP$ 是指定二面角的平面角。（2 分）

在直角三角形 ACP 中，$AP=\sqrt{9^2+12^2}=15$ 分米，所以二面角的余弦为 $\cos\angle CAP=9/15=3/5$。（2 分）

在截面内取 C 到 AP 的垂足 H。过 H 作平行于 AB 的直线，它位于平面 PAB 内，并且垂直于 CH。因此 CH 垂直于平面 PAB 内交于 H 的两条直线，故 CH 就是所求距离。（2 分）

在三角形 ACP 中分别取 AC、AP 为底，由面积相等得 $AC\cdot CP=AP\cdot CH$，所以 $CH=9\cdot 12/15=36/5$ 分米。（2 分）

第 4 题 · 斜隔板的面积与下方容积（12 分）

一个长方体水箱的底面为矩形 $ABCD$，$AB=12$ 分米，$AD=8$ 分米，箱高为 11 分米。一块平整的隔板与箱内四条竖直棱都相交，且沿四个侧面与箱壁接合。它在 A,B,D 正上方的三个交点距水箱底面分别为 $2,5,6$ 分米。

（1）求在 C 正上方交点距底面的高度。

（2）求隔板面积。

（3）求隔板下方的容积。

解析与评分

> 第（1）问，共 3 分。以 A 为原点，沿 AB,AD 和竖直向上三个方向建系。隔板所在平面可写为 $z=2+ax+by$。代入 B,D 上方的交点，得 $a=(5-2)/12=1/4$、$b=(6-2)/8=1/2$。（2 分）代入 C 处的 $x=12,y=8$，得高度 $2+3+4=9$ 分米。（1 分）
>
> 第（2）问，共 4 分。隔板平面的方程为 $x+2y-4z+8=0$，可取法向量 $(1,2,-4)$。与底面所成夹角的余弦是 $4/\sqrt{21}$。（2 分）四个交点都在对应的竖直棱内部，隔板在底面上的正投影为整个矩形 $ABCD$。因此隔板面积为 $\frac{12\cdot 8}{4/\sqrt{21}}=24\sqrt{21}$ 平方分米。（2 分）
>
> 第（3）问，共 5 分。水箱的中心是 $(6,4,11/2)$，代入隔板方程可验证它在隔板上。（2 分）以该中心作空间中心对称，水箱仍与自身重合，且隔板下方与上方的两部分彼此对应，故两部分体积相等。（2 分）隔板下方的容积为 $\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8\cdot 11=528$ 立方分米。（1 分）