数列章末小测

建议用时 25 分钟 · 满分 30 分

第 1 题 · 等差数列的通项与求和（5 分）

等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=-1$、$a_7=14$。求通项 a_n 和前八项和 S_8。

解析与评分

公差为 $d=(14-(-1))/5=3$，故 $a_1=a_2-d=-4$，所以 $a_n=-4+3(n-1)=3n-7$。前八项和为 $S_8=\frac{8}{2}[2(-4)+7\cdot 3]=52$。

评分要点为求公差占 1 分，求首项及通项占 2 分，求前八项和占 2 分。

第 2 题 · 由符号确定等比数列（5 分）

实等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=8$、$b_3=2$ 且 $b_2<0$。求公比与前四项和。

解析与评分

由 $b_3=b_1q^2$ 得 $q^2=1/4$。又 $b_2=8q<0$，所以 $q=-1/2$。前四项和为 $8-4+2-1=5$。

评分要点为列出并解出 q^2 占 2 分，借助符号确定公比占 1 分，求前四项和占 2 分。

第 3 题 · 用数学归纳法证明求和式（8 分）

用数学归纳法证明，对每个正整数 n，有 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(3k-1)=n^2(n+1)$。

解析与评分

$n=1$ 时，左边与右边都等于 2。假设 $n=m$ 时等式成立，加入第 $m+1$ 项后，得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} k(3k-1) &= m^2(m+1)+(m+1)(3m+2)\\ &= (m+1)\big(m^2+3m+2\big)\\ &= (m+1)^2(m+2).\end{aligned}$$

这正是 $n=m+1$ 的结论，由归纳法可知等式对所有正整数成立。

评分要点为验证起点占 2 分，写出归纳假设占 1 分，正确加入新项占 2 分，化简到目标式占 2 分，写出归纳结论占 1 分。

第 4 题 · 归一化递推与错位相减（12 分）

设 $a_1=3$，且 $a_{n+1}=2a_n+(2n-1)2^n$（$n\ge 1$）。

（1）令 $b_n=a_n/2^{n-1}$，求 $b_{n+1}-b_n$。

（2）求通项 a_n。

（3）求 $T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-2a_k)$。

解析与评分

（1）将递推式除以 2^n，得 $b_{n+1}=b_n+2n-1$，所以 $b_{n+1}-b_n=2n-1$。

（2）因 $b_1=3$，累加得到 $b_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=3+(n-1)^2$，在 $n=1$ 时也成立。故 $a_n=2^{n-1}[3+(n-1)^2]$。

（3）由原递推式，$T_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)2^k$。将 $2T_n$ 按同次幂与 T_n 对齐并相减，有

$$\begin{aligned}2T_n-T_n&=(2n-1)2^{n+1}-2-2\sum_{k=2}^{n}2^k\\&=(2n-1)2^{n+1}-2-2(2^{n+1}-4)\\&=(2n-3)2^{n+1}+6.\end{aligned}$$

因此 $T_n=(2n-3)2^{n+1}+6$，$n=1$ 时求和中的中间部分为空，公式仍成立。

评分要点为第（1）问正确归一化占 2 分，得到差式占 1 分。第（2）问累加并利用初值占 2 分，求出 a_n 占 2 分。第（3）问改写为加权等比和占 1 分，正确错位相减占 2 分，化简得到结果占 2 分。