概率与统计章末小测

建议用时 25 分钟 · 满分 30 分

第 1 题 · 从直方图估计候车时间（5 分）

抽查 150 次候车记录，候车时长的频率分布直方图按分钟分为区间 $[0,4)$、$[4,10)$、$[10,20]$，三个柱高依次为 $0.05, 0.10, 0.02$。求第二组的频数，并按组内均匀分布近似估计这批记录的中位数。

解析与评分

> 第二组的频率为 $6\cdot 0.10=0.60$，频数为 $150\cdot 0.60=90$。（2 分）
>
> 第一组的累计频率为 $4\cdot 0.05=0.20$，到第二组末的累计频率为 0.80，所以中位数落在第二组。（1 分）
>
> 第二组内累计频率从 0.20 增至 0.50 需要的区间长度是 $(0.50-0.20)/0.10=3$ 分钟，故估计中位数为 $4+3=7$ 分钟。（2 分）

第 2 题 · 根据领取状态识别预约入口（5 分）

某馆的预约记录中，来自甲入口的占 $3/8$，其余来自乙入口。来自甲入口的预约当天领取的比例为 $2/3$，来自乙入口的为 $1/5$。从全部预约记录中等可能抽取一份。求它当天领取的概率。已知这份预约当天领取，求它来自甲入口的概率。

解析与评分

> 记 B 为当天领取。由全概率公式，$P(B)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{8}$。（2 分）
>
> 来自甲入口且当天领取的概率为 $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$。（1 分）
>
> 把范围缩小到当天领取的记录，条件概率为 $\frac{1/4}{3/8}=\frac{2}{3}$。（2 分）

第 3 题 · 不放回抽查设备（8 分）

七台有不同编号的设备中，两台需要更换滤网。等可能地抽取三台进行检查，抽取不放回。设抽到的三台中需要更换滤网的台数为 X，写出 X 的分布列并求 $E(X)$。

解析与评分

> 可能取值为 $0,1,2$，抽取方式共有 $\binom{7}{3}=35$ 种等可能结果。（2 分）
>
> 抽到 k 台需要更换滤网的设备时，有 $\binom{2}{k}\binom{5}{3-k}$ 种结果。依次取 $k=0,1,2$，得以下分布列。（4 分）

X	0	1	2
P	$2/7$	$4/7$	$1/7$

> 所以 $E(X)=0\cdot\frac{2}{7}+1\cdot\frac{4}{7}+2\cdot\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$。（2 分）

第 4 题 · 应急配件的备货量（12 分）

维修点将检查四台设备。每台设备以 $1/2$ 的概率需要更换一个同类型配件，无需更换时消耗零个配件。四台设备是否需要更换相互独立。用 X 表示所需配件总数。维修点检查前可备货 s 个，$s\in\{0,1,2,3,4\}$，每个备货配件成本 2 元，剩余配件没有残值。若备货不足，缺少的每个配件按 6 元临时购入。

（1）写出 X 的分布列，并求 $P(X\ge 3)$。

（2）求使期望总成本最小的 s，并求此时的期望总成本。

解析与评分

第（1）问，共 4 分。将需要更换视为成功，四次试验独立且成功概率相同，所以 $X\sim B(4,1/2)$，分布列如下。（2 分）

X	0	1	2	3	4
P	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$

因此 $P(X\ge 3)=(4+1)/16=5/16$。（2 分）

第（2）问，共 8 分。设 $C(s)$ 是备货 s 个时的期望总成本。增加一个备货配件花 2 元。仅当 $X\ge s+1$ 时，这一件可少花 6 元临时采购，所以 $C(s+1)-C(s)=2-6P(X\ge s+1)$。（3 分）

对应 $s=0,1,2,3$，尾概率依次为 $15/16,11/16,5/16,1/16$。前两个大于 $1/3$，后两个小于 $1/3$，故期望总成本先下降再上升，在 $s=2$ 时最小。（3 分）

备货两个花 4 元。$X=3,4$ 时分别临时购入 $1,2$ 个，于是最小期望总成本为

$$4+6\left(\frac{4}{16}+2\cdot\frac{1}{16}\right)=\frac{25}{4}$$

元。（2 分）