数学建模与探究章末小测

建议用时 25 分钟 · 满分 30 分

第 1 题 · 设备租赁的分段计费（5 分）

某设备每次租用收 8 元基本费，前 4 小时每小时再收 3 元，超过 4 小时的部分每小时再收 2 元。设租用 $x>0$ 小时。写出费用函数 $C(x)$，并计算租用 3 小时和 7 小时的费用。

解析与评分

$0<x\le 4$ 时，$C(x)=8+3x$。$x>4$ 时，$C(x)=8+3\cdot 4+2(x-4)=12+2x$。因此 $C(3)=17$ 元，$C(7)=26$ 元。

评分时，第一段的区间和表达式占 2 分，第二段占 1 分，两次费用各占 1 分。

第 2 题 · 用两次测角确定高度（5 分）

竖直旗杆的底部与两个测点在同一条水平直线上。两个测点均在旗杆同侧，彼此相距 8 米。相同高度的仪器在近处、远处测得的仰角正切值分别为 $\frac{3}{4},\frac{1}{2}$。仪器离地 1.4 米。求旗杆高度。

解析与评分

设近处距旗杆底部 d 米，旗杆顶端比仪器高 h 米，则 $h=\frac{3}{4}d=\frac{1}{2}(d+8)$。解得 $d=16,h=12$，加上仪器高度，旗杆高 13.4 米。

评分时，设变量并写出等式占 2 分，求出 d,h 占 2 分，写出总高度占 1 分。

第 3 题 · 选择通过验证的预测模型（8 分）

一个题库在第 0 周、第 1 周分别有 30 道、36 道题。模型甲假设每周增加固定数量，模型乙假设每周按固定比例增加。用这两次记录建立模型，允许预测值保留小数。第 2 周、第 3 周的实际题量是 43 道、51 道。若平均绝对误差至多为 1 道才可使用，判断哪个模型合格。

解析与评分

甲每周加 6 道，模型为 $30+6t$。乙每周乘 $36/30=1.2$，模型为 $30(1.2)^t$。

甲在验证周的预测为 42、48，平均绝对误差为 $(1+3)/2=2$。乙预测为 43.2、51.84，平均绝对误差为 $(0.2+0.84)/2=0.52$。按给定标准，乙通过验证。

评分时，两个模型各占 2 分，两组平均绝对误差各占 1 分，比较阈值并得出结论占 2 分。

第 4 题 · 从连续上界改进到整数最优（12 分）

校园市集要制作甲、乙两种套件。每件甲用 2 份材料一和 1 份材料二，得 4 分。每件乙用 1 份材料一和 2 份材料二，得 5 分。两种材料各有 10 份。写出总分与约束。若件数可取非负实数，总分最大是多少？若件数必须是非负整数，总分最大是多少，给出一种达到它的方案。

解析与评分

设两种件数为 x,y，目标为 $4x+5y$，约束为 $2x+y\le 10$，$x+2y\le 10$，且 $x,y\ge 0$。

两条约束按权重 1、2 相加，得 $4x+5y\le 30$。实数条件下，$(x,y)=(\frac{10}{3},\frac{10}{3})$ 同时取等，能得 30 分。

整数条件下，两条约束相加得 $3(x+y)\le 20$，所以 $x+y\le 6$。于是 $4x+5y=3(x+y)+(x+2y)\le 18+10=28$。取 $(x,y)=(2,4)$，两种材料分别用 8、10 份，得 28 分，达到上界。

评分时，完整写出变量约束和目标占 3 分，给出实数上界及取等方案占 3 分，给出整数上界占 4 分，验证达到上界的可行整数方案占 2 分。