函数与导数章末小测

建议用时 25 分钟 · 满分 30 分

第 1 题 · 导数与切线（5 分）

设 $f(x)=(x+1)e^{-x}$，求其图像在 $x=2$ 处的切线方程。

解析与评分

用乘积法则和复合函数求导得 $f'(x)=e^{-x}-(x+1)e^{-x}=-xe^{-x}$。（2 分）

切点为 $(2,3e^{-2})$，切线斜率为 $-2e^{-2}$。（1 分）

所以切线方程为 $y-3e^{-2}=-2e^{-2}(x-2)$，也可写成 $y=e^{-2}(7-2x)$。（2 分）

第 2 题 · 对数不等式（5 分）

求不等式 $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)\le 2$ 的解集。

解析与评分

两个真数必须为正，所以定义域为 $x>1$。（1 分）

在定义域内合并对数。因底数 $2>1$，原不等式等价于 $(x-1)(x+2)\le 4$，即 $(x+3)(x-2)\le 0$。（2 分）

二次不等式的解集为 $[-3,2]$，与 $x>1$ 取交集得 $(1,2]$。（2 分）

第 3 题 · 零点唯一性与二分法（8 分）

设 $p(x)=2^x+x-7$。证明 p 在 $(1,3)$ 内恰有一个零点，并用两次二分法得到包含该零点的区间。

解析与评分

2^x 与 x 都在 $[1,3]$ 上连续且严格递增，所以 p 连续且严格递增。（2 分）

$p(1)=-4$，$p(3)=4$。异号保证区间内部存在一个零点，严格单调保证其唯一性。（2 分）

第一次取中点 2，得 $p(2)=-1$，保留 $(2,3)$。（2 分）

第二次取中点 $5/2$，得 $p(5/2)=4\sqrt{2}-9/2>0$，所以零点落在 $(2,5/2)$。（2 分）

第 4 题 · 含参函数的最值与根的个数（12 分）

设 $f_a(x)=(x+a)e^{-x}$，$x\in[0,+\infty)$，$a\in\mathbb{R}$。

（1）讨论 f_a 的单调性并求最大值。

（2）若方程 $f_a(x)=e^{-1}$ 恰有两个不同的解，求 a 的范围。

解析与评分

（1）$f_a'(x)=(1-a-x)e^{-x}$，由 $e^{-x}>0$ 可知其符号始终与 $1-a-x$ 相同。（2 分）

当 $a\ge 1$ 时，f_a 在 $[0,+\infty)$ 上严格递减，最大值为 $f_a(0)=a$。当 $a<1$ 时，f_a 在 $[0,1-a]$ 上严格递增，在 $[1-a,+\infty)$ 上严格递减，最大值为 $f_a(1-a)=e^{a-1}$。（4 分）

（2）$a\ge 1$ 时由严格递减可知至多一个解。$a<1$ 时，函数从 $f_a(0)=a$ 递增到峰值，之后严格递减并趋于 0，可分别在两段考察水平线 $y=e^{-1}$ 的交点。（2 分）

要有两个不同解，必须且只需 $a\le e^{-1}<e^{a-1}$。左侧可以取等，因为 $x=0$ 属于定义域。右侧必须严格，因为相等时两段只在峰值处给出同一个解。（3 分）

整理得 $0<a\le e^{-1}$，且这一区间都满足先前的条件 $a<1$。（1 分）