集合、逻辑与不等式章末小测

建议用时 25 分钟 · 满分 30 分

第 1 题 · 整数集合的交补运算（5 分）

设全集 $U=\mathbb{Z}$，$A=\{x\in\mathbb{Z}:-5<x\le 3\}$，$B=\{x\in\mathbb{Z}:x^2-3x-10\le 0\}$。用列举法写出 $A\cap B$ 和 $A\cap(\complement_U B)$。

解析与评分

由 $(x-5)(x+2)\le 0$ 得 B 中的整数从 -2 到 5，两端都包含。（2 分）

A 中的整数从 -4 到 3，所以 $A\cap B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$。（2 分）

A 中余下的元素给出 $A\cap(\complement_U B)=\{-4,-3\}$。（1 分）

第 2 题 · 否定全称命题（5 分）

写出命题“对任意 $x\in[-1,2]$，都有 $x^2-x\le 1$”的否定，并判断原命题的真假，说明理由。

解析与评分

否定为“存在 $x\in[-1,2]$，使 $x^2-x>1$”。量词改为存在，范围保持为 $[-1,2]$，结论改为严格大于。（3 分）

原命题为假。例如 $x=-1$ 属于指定区间，而 $(-1)^2-(-1)=2>1$。（2 分）

第 3 题 · 利用直墙围出矩形（8 分）

用一段长 34 米的围栏沿直墙围出矩形。只围靠墙边之外的三边，围栏全部用完。两条垂直于墙的边均长 x 米，场地要求 $4\le x\le 7$。面积至少为 120 平方米时，求 x 的取值范围及可达到的最大面积。

解析与评分

与墙平行的围栏长 $34-2x$ 米，面积为 $S(x)=x(34-2x)$，给定区间内两种边长都为正。（2 分）

$S(x)\ge 120$ 等价于 $(x-5)(x-12)\le 0$，求得 $5\le x\le 12$。与场地约束相交，得到 $x\in[5,7]$。（3 分）

配方得 $S(x)=289/2-2(x-17/2)^2$。在 $[5,7]$ 上，x 越大越接近对称轴 $x=17/2$，故 S 递增，最大值为 $S(7)=140$ 平方米。（3 分）

第 4 题 · 带权倒数和与恒成立（12 分）

已知 $x, y > 0$ 且 $x + 2y = 18$。

（1）求 $\dfrac{9}{x} + \dfrac{2}{y}$ 的最小值及取等点。

（2）求最小的实数 m，使 $\dfrac{m}{x} + \dfrac{2}{y} \geq 2$ 对所有符合条件的 x, y 恒成立，并求该参数下的取等点。

解析与评分

（1）写作 $9/x + 4/(2y)$。由加权柯西不等式可得下界 $(3+2)^2/18 = 25/18$。等号要求 $x : 2y = 3 : 2$，所以在 $x = 54/5, y = 18/5$ 时取到最小值 $25/18$。（4 分）

（2）令 $t = 2y = 18 - x$，则 $0 < t < 18$。由于 $x > 0$，原不等式等价于

$$m \geq (18 - t)\left(2 - \frac{4}{t}\right) = 40 - 2t - \frac{72}{t}.$$

所以要找右端在 $0 < t < 18$ 上的最大值。（3 分）

由 $2t + 72/t \geq 24$，且 $t = 6$ 时取等，右端最大值为 16。（3 分）

因此最小参数是 $m = 16$。此时只有 $t = 6$ 使原不等式取等，即 $x = 12, y = 3$。（2 分）