选修拓展章末小测

建议用时 25 分钟 · 满分 30 分

第 1 题 · 判断线性近似的偏差方向（5 分）

用 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=4$ 处的线性近似估计 $\sqrt{4.2}$，并判断估计值偏大还是偏小。

解析与评分

> $f(4)=2$，$f'(4)=\frac{1}{4}$，所以近似值为 $2+\frac{1}{4}(4.2-4)=2.05$。在 $[4,4.2]$ 上，$f'(x)$ 严格递减，实际增加量小于 $\frac{1}{4}(4.2-4)$。因此估计值偏大。
>
> 评分时，求导并算出 $f'(4)$ 占 2 分，写出近似值占 2 分，说明偏差方向占 1 分。

第 2 题 · 从矩阵变换读出比例（5 分）

平面变换 $T(x,y)=(x-y,x+y)$。求 $T(3,1)$，并说明这个变换把每个向量的长度放大到原来的多少倍。再指出它的旋转角和方向。

解析与评分

> $T(3,1)=(2,4)$。一般地，$(x-y)^2+(x+y)^2=2(x^2+y^2)$，所以长度变为 $\sqrt{2}$ 倍。将变换矩阵除以 $\sqrt{2}$，得到 $\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}$，对应逆时针旋转 45°。
>
> 评分时，算出坐标占 1 分，推出长度倍数占 2 分，给出旋转角与方向占 2 分。

第 3 题 · 用标准误决定把样本加在哪一层（8 分）

某校两个年级共 1000 人，人数分别为 600 和 400。分别在本年级内独立、有放回地抽查，两个年级各抽 60 次和 80 次，其中支持某活动的次数为 39 和 36。估计全校支持率和该估计的标准误。若还能增加 20 次抽样且只能给一个年级，按本次的层内支持率估计哪种分配的方差更小。

设第 i 层人数占比为 w_i、样本比例为 $\hat{p}_i$、抽样次数为 n_i。可用 $\sum_{i=1}^{2} w_i^2\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)/n_i$ 估计分层比例估计的方差。

解析与评分

> 两层样本比例为 $0.65, 0.45$，人数权重为 $0.6, 0.4$，所以全校支持率估计为 $0.6\cdot 0.65+0.4\cdot 0.45=0.57$。
>
> 方差估计为 $0.0819/60+0.0396/80=0.00186$，标准误约为 0.0431，即 4.31 个百分点。
>
> 如果把 20 次都加给第一层，估计方差为 $0.0819/80+0.0396/80=0.00151875$。如果都加给第二层，估计方差为 $0.0819/60+0.0396/100=0.001761$。按给定模型，应加给第一层。
>
> 评分时，算出层内比例和加权比例占 3 分，算出标准误占 2 分，比较两种分配并得出结论占 3 分。

第 4 题 · 用中心投影检查取景范围（12 分）

以摄像机的位置为原点，光轴沿 z 轴正向，像平面为 $z=4$，可拍到的水平范围为像平面上的 $-3\le X\le 3$，竖直范围足够大。两块标牌均与像平面平行，宽 2、高 3，边分别沿 x,y 轴方向。甲标牌中心是 $(-3,0,8)$，乙标牌中心是 $(4,0,d)$，其中 $d>4$。在中心投影模型下，测得甲、乙成像的高度比为 $3:2$。

1. 求 d。
2. 分别写出两块标牌成像的水平坐标区间，求它们之间的水平空隙。
3. 摄像机可以沿光轴正向移动 s，其中 $0\le s<4$。像平面与摄像机的相对位置保持不变。求保证两个标牌完整取景的最大移动距离。

解析与评分

1. 深度为 z 的点在像平面的坐标是 $X=4x/z$，$Y=4y/z$。两块标牌实物等高，像高比等于深度的反比，所以 $d/8=3/2$，得 $d=12$。
2. 甲牌实物横向范围 $[-4,-2]$，投影后是 $[-2,-1]$。乙牌实物横向范围 $[3,5]$，投影后是 $[1,\tfrac{5}{3}]$。甲牌右边界与乙牌左边界相距 2。
3. 相对深度变为 $8-s$ 和 $12-s$。甲的左边界要求 $16/(8-s)\le 3$，得到 $s\le\tfrac{8}{3}$。乙的右边界要求 $20/(12-s)\le 3$，得到 $s\le\tfrac{16}{3}$。它们的另外两条边界分别仍在对应的半幅可视范围内。结合 $0\le s<4$，最大移动距离是 $\tfrac{8}{3}$。

评分时，投影比例及深度占 3 分，两个区间与空隙占 4 分，建立移动后的两个边界不等式并给出最大距离占 5 分。