解析几何章末小测

建议用时 25 分钟 · 满分 30 分

第 1 题 · 直线方程与点线距离（5 分）

直线 l 经过点 $A(-1,2)$、$B(3,5)$。求 l 的一般式方程和点 $P(4,2)$ 到 l 的距离。

解析与评分

> 斜率为 $(5-2)/(3-(-1))=3/4$，故 $y-2=\frac{3}{4}(x+1)$，整理得 $3x-4y+11=0$。点 P 到直线的距离为 $|12-8+11|/5=3$。
>
> 评分要点为求斜率占 1 分，正确写出一般式占 2 分，求出点线距离占 2 分。

第 2 题 · 由直径建圆并求弦长（5 分）

以 $A(-5,1)$、$B(1,9)$ 为直径的端点作圆。求圆的标准方程与直线 $y=8$ 截得的弦长。

解析与评分

> 圆心是线段 AB 的中点 $(-2,5)$，直径长为 $\sqrt{6^2+8^2}=10$，故半径为 5，圆的方程为 $(x+2)^2+(y-5)^2=25$。圆心到 $y=8$ 的距离为 3，所以弦长为 $2\sqrt{25-9}=8$。
>
> 评分要点为求圆心与半径占 2 分，圆的方程占 1 分，求弦长占 2 分。

第 3 题 · 由焦点与渐近线确定双曲线（8 分）

双曲线的两个焦点是 $(0,-13)$、$(0,13)$，渐近线为 $y=\pm\frac{5}{12}x$。求双曲线的标准方程、离心率，并求曲线上纵坐标为 $-5\sqrt{2}$ 的所有点。

解析与评分

> 焦点在 y 轴上，设方程为 $y^2/a^2-x^2/b^2=1$。渐近线给出 $a/b=5/12$，半焦距给出 $a^2+b^2=169$，解得 $a=5$、$b=12$。故方程为 $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{144}=1$，离心率为 $13/5$。
>
> 代入 $y=-5\sqrt{2}$ 得 $x^2/144=50/25-1=1$，所以两个点为 $(12,-5\sqrt{2})$、$(-12,-5\sqrt{2})$。
>
> 评分要点为选对标准方程的方向并列出参数关系占 2 分，求出标准方程占 3 分，求离心率占 1 分，求出两点占 2 分。

第 4 题 · 过固定点的椭圆弦与面积最值（12 分）

设 O 为原点，椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1$。动直线 $l\colon y=kx+3$（$k\in\mathbb{R}$）与 C 相交于 A,B。

（1）说明对每个实数 k，A,B 都是两个不同的点。

（2）作代换 $x=8u$，$y=5v$，求归一化直线到原点的距离 d，并用 d 表示 $\triangle OAB$ 的面积。

（3）求面积的最大值与对应的 k。

解析与评分

（1）所有直线都经过 $(0,3)$，该点满足 $0^2/64+3^2/25=9/25<1$，在椭圆内部。因此每条直线都从椭圆两侧穿出，与椭圆有两个不同的交点。

（2）作代换后，椭圆化为单位圆，直线成为 $8ku-5v+3=0$。归一化直线到原点的距离为

$$d=\frac{3}{\sqrt{64k^2+25}}.$$

在单位圆中，弦长为 $2\sqrt{1-d^2}$，弦和原点组成的三角形面积为 $d\sqrt{1-d^2}$。还原坐标时，面积放大 $8\cdot 5=40$ 倍，故 $S_{\triangle OAB}=40d\sqrt{1-d^2}$。

（3）有 $0<d\le 3/5$，且 $d=3/5$ 当且仅当 $k=0$。令 $z=d^2$，则 $0<z\le 9/25<1/2$，且 $z(1-z)=1/4-(z-1/2)^2$ 在此范围随 z 增大而增大。因此面积在 $d=3/5$ 时最大，最大值为 $40\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{96}{5}$，对应 $k=0$。

评分要点为第（1）问指出固定点在椭圆内部占 2 分，说明两个交点不同占 1 分。第（2）问求 d 占 2 分，写出单位圆内的三角形面积占 2 分，完成面积缩放占 1 分。第（3）问确定单调关系与取等条件占 3 分，算出最大值占 1 分。